UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES CUAUTITLÁN
Ingeniería Mecánica Eléctrica

Mecánica de Sólidos

Temas

I Esfuerzo y deformación.

II Torsión.

III Diagramas de fuerzas cortantes y momentos flexionantes. Esfuerzos por Flexión.

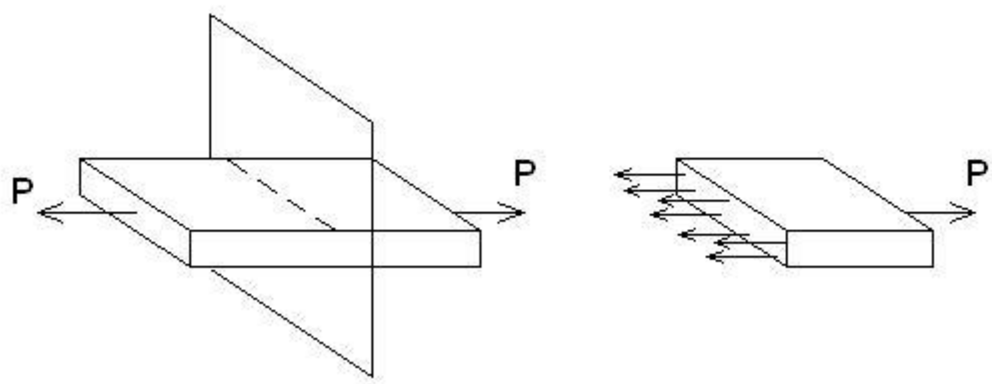
Esfuerzo y Deformación

Esfuerzo

Es la resistencia interna de un cuerpo cuando se le aplica una fuerza externa que tiende a cambiar su forma o tamaño.

Esfuerzo total.- es la resistencia interna total que actúa en una sección del cuerpo

Esfuerzo unitario (σ).- esfuerzo (fuerza) por unidad de área



La fuerza (esfuerzo) interior total en la barra es la resultante de todas las fuerzas interiores y es igual a P.

En ingeniería:

"esfuerzo" = fuerza interior total = esfuerzo unitario

Pero generalmente el término esfuerzo se usa para significar esfuerzo unitario

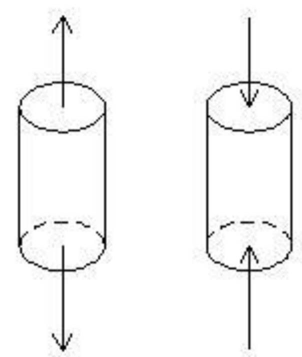
$$\sigma = \frac{F}{A}$$

donde:

σ = esfuerzo
F = carga aplicada
A = área sobre la cual actúa la carga

La relación $\sigma = \frac{F}{A}$ se usa:

- Para fuerzas aplicadas normalmente (perpendicularmente) a la superficie
- Partes cargadas a tensión o compresión
- Cargas aplicadas a través del centroide de la sección transversal y que coinciden con el eje

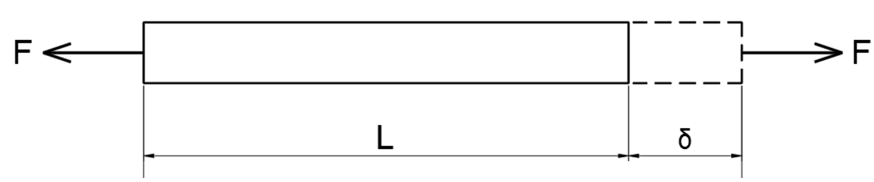


Deformación

Los cambios en las dimensiones de un cuerpo ocasionados por el esfuerzo se llaman deformaciones. Bajo tensión se llaman también elongaciones o alargamientos y bajo compresión se les llama también contracciones.

Deformación total (δ).- cambio total de longitud del cuerpo
Deformación unitaria (ε).- deformación por unidad de longitud

La deformación unitaria se conoce generalmente sólo como deformación.



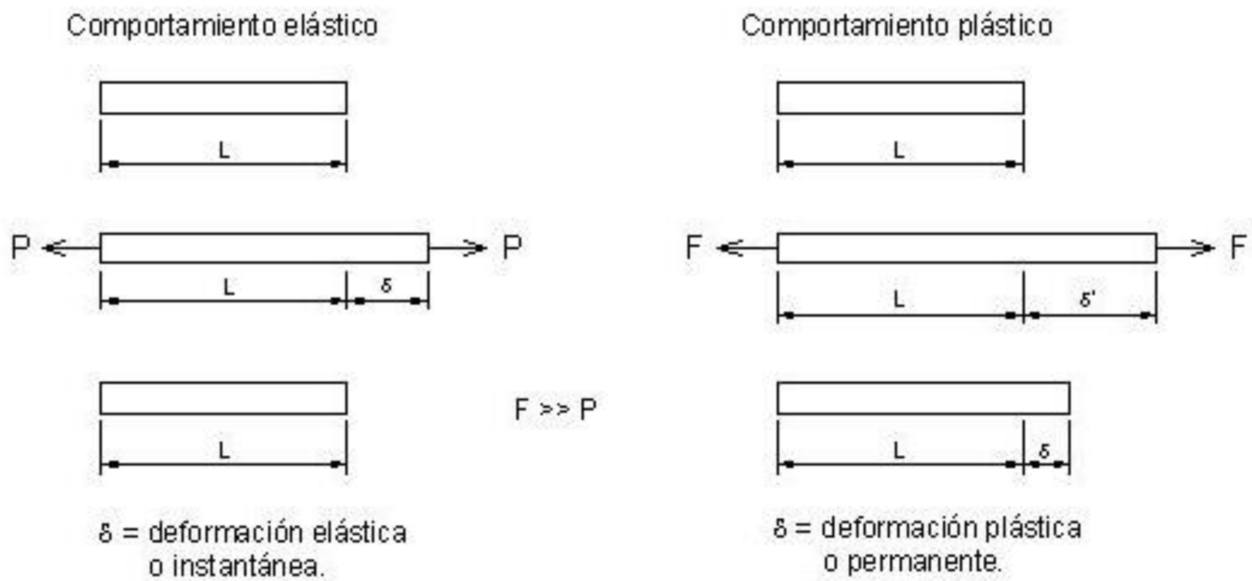
$$\varepsilon = \frac{\delta}{L}$$

donde

ε = deformación
δ = deformación total
L = longitud original

ε puede quedar en unidades de longitud entre longitud (cm/cm por ejemplo) o adimensional.

Elasticidad
Es la propiedad de un material para recuperar sus dimensiones originales al suprimir las fuerzas que se aplican.



Relación esfuerzo deformación
Ley de Hooke: el esfuerzo es directamente proporcional a la deformación

$$\sigma \;\alpha\; \varepsilon$$

Agregando una constante de proporcionalidad

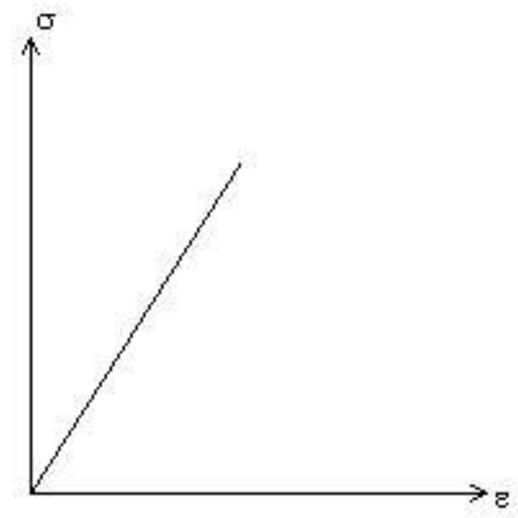
$$\sigma = k\varepsilon$$

Esta constante k es el módulo de elasticidad o módulo de Young y se designa como **E**. Entonces:

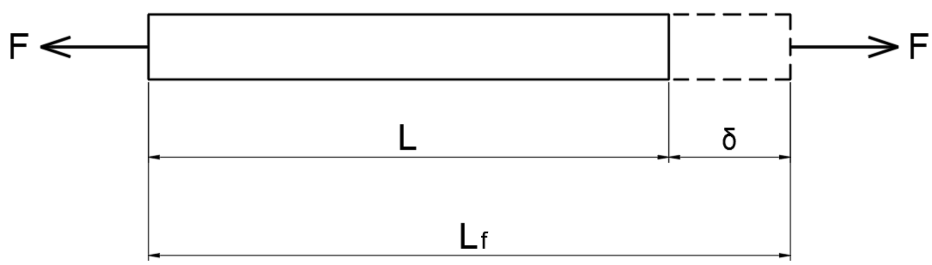
$$\sigma = E\varepsilon$$

donde

σ = esfuerzo
ε = deformación
E = módulo de elasticidad



Deformación total



$$\sigma = E\varepsilon$$

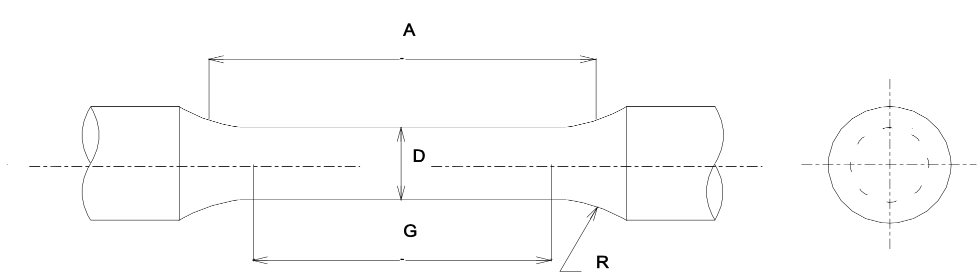
$$\frac{F}{A} = E\,\frac{L_f - L}{L}$$

$$\frac{F}{A} = E\,\frac{\delta}{L}$$

$$\delta = \frac{FL}{AE}$$

Diagrama esfuerzo deformación

Se construye a partir de un ensayo de tensión



Probeta normalizada para la prueba de tensión

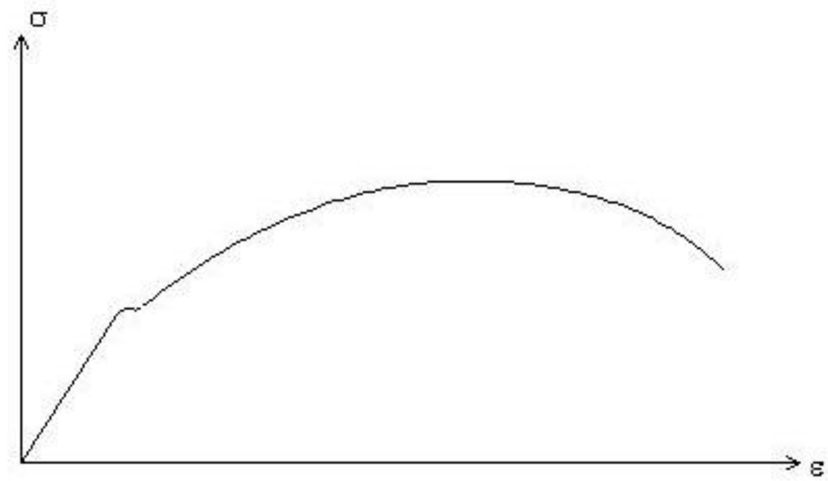
Máquina para pruebas de tensión

Probeta lista para la prueba

Diagrama Esfuerzo Deformación

En el ensayo se mide P y ΔL (Lf – Lo). Estos datos se convierten después a

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad \text{y} \quad \varepsilon = \frac{\Delta L}{Lo}$$



El diagrama σ–ε ayuda a evaluar algunas de las propiedades mecánicas de los materiales.

- El punto **P** es el límite de proporcionalidad. Para un esfuerzo mayor de σ_p ya no se cumple la ley de Hooke.
- **f** es el punto de fluencia o cedencia, donde el material fluye o se deforma plásticamente.
- El punto **M** es el esfuerzo máximo que el material puede soportar.
- En **R** ocurre la fractura. De **M** a **R** se forma un cuello o estrangulamiento en la probeta,
- σ_c es el esfuerzo de fluencia o de cedencia, corresponde a una deformación permanente del 0.2% que es aceptable en el diseño. Se usa cuando el punto de cedencia no se puede definir claramente.
- El módulo de elasticidad es la pendiente de la parte recta del diagrama. Es un índice de la rigidez del material.

Tenacidad. Es la capacidad de un material de absorber energía hasta que ocurre su fractura. Se calcula mediante el área total bajo el diagrama σ-ε.

Resiliencia. Es la capacidad de un material de absorber energía sin deformarse permanentemente.

Módulo de resiliencia. Es la energía absorbida por unidad de volumen en la zona elástica. Se puede calcular mediante el área bajo la recta de diagrama σ-ε.

Proporción de Poisson

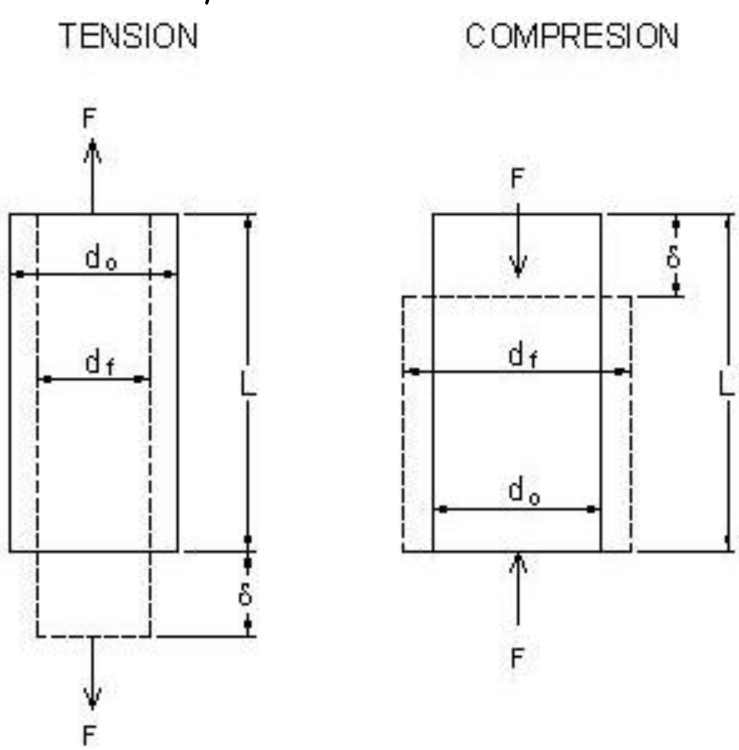
Las deformaciones laterales tienen una relación constante con las axiales. Esta relación es la proporción de Poisson.

$$\mu = \frac{\varepsilon_l}{\varepsilon_a}$$

donde

ε_l = deformación lateral
ε_a = deformación axial

μ varía entre 0.25 y 0.35.

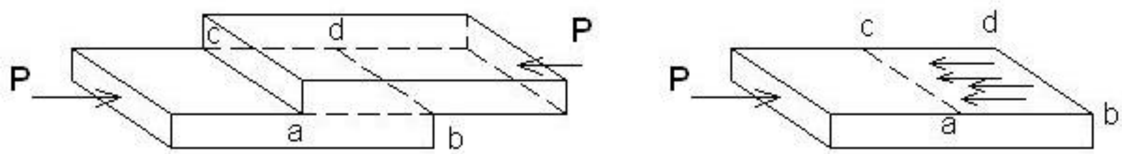


$$\varepsilon_l = \frac{\Delta d}{d_o}$$

$$\varepsilon_l = \frac{d_o - d_f}{d_o}$$

Esfuerzo cortante

El esfuerzo cortante se produce en un cuerpo cuando la fuerza aplicada tiende a hacer que una parte del cuerpo se corte o deslice con respecto a la otra.



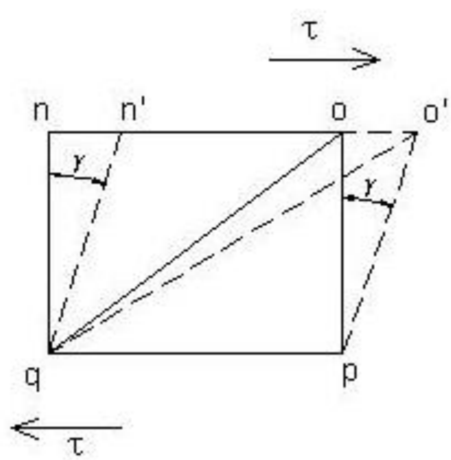
Esta fuerza actúa en un plano paralelo a la carga aplicada (y no perpendicular como en el caso de los esfuerzos normales σ).

$$\tau = \frac{F}{A}$$

donde

τ = esfuerzo cortante
F = fuerza cortante
A = área sobre la que actúa la fuerza cortante

Deformación angular



γ = deformación angular, equivalente a la elongación longitudinal en *qo'* y a la contracción en *n'p*.

$$\tan\gamma = \frac{nn'}{nq}$$

$$\gamma = \tan^{-1}\frac{nn'}{nq}$$

Para ángulos muy pequeños: γ = tan γ, en radianes. O sea

$$\gamma = \frac{nn'}{nq}$$

Relación esfuerzo cortante – deformación angular

Aplicando la ley de Hooke

$$\tau = G\gamma$$

donde

τ = esfuerzo cortante

γ = deformación angular, en radianes

G = constante de proporcionalidad o módulo de elasticidad al cortante

Esfuerzo permisible y factor de seguridad

La resistencia en el punto de fluencia o el esfuerzo de cedencia, se considera generalmente como el esfuerzo máximo que puede tolerarse, puesto que esfuerzos menores no producen deformación permanente.

Se aplica un factor de seguridad al esfuerzo máximo posible para obtener un esfuerzo permisible o de trabajo. Entonces, el esfuerzo permisible es el esfuerzo máximo que se puede aplicar con seguridad a un elemento.

$$\sigma_p = \frac{\sigma_m}{FS}$$

donde

σ_p = esfuerzo permisible

σ_m = esfuerzo máximo, que no provoca deformación plástica

FS = Factor de seguridad

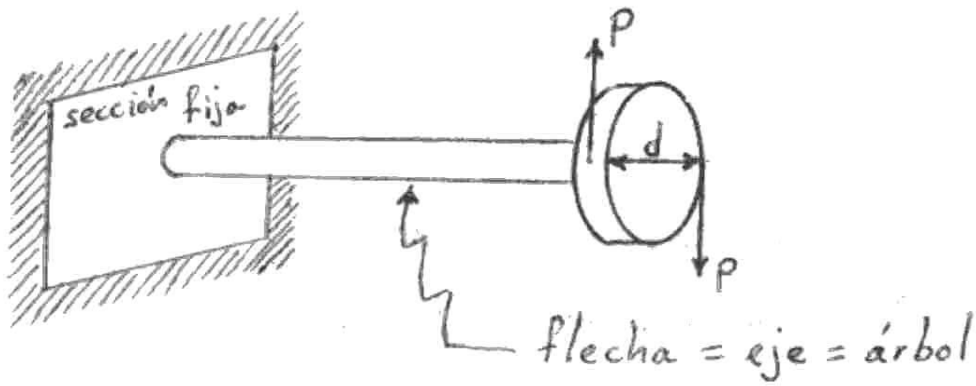
Los esfuerzos permisibles y su factor de seguridad están especificados en algún reglamento (por ejemplo, de construcción) o son elegidos por el diseñador considerando los siguientes parámetros:

a) Conocimiento y exactitud de las cargas aplicadas
b) Tipo de falla
c) Tipos de cargas: estáticas, dinámicas, cíclicas y variables
d) Efectos de la corrosión y deterioro
e) Temperatura de funcionamiento

Torsión

Este tipo de esfuerzo hace que el objeto tenga tendencia a retorcerse.

Momento de torsión
Consideremos una barra recta, de sección circular, empotrada en un extremo, y que en el otro se le aplique un par de fuerzas que tienda a hacerla girar alrededor de su eje longitudinal.

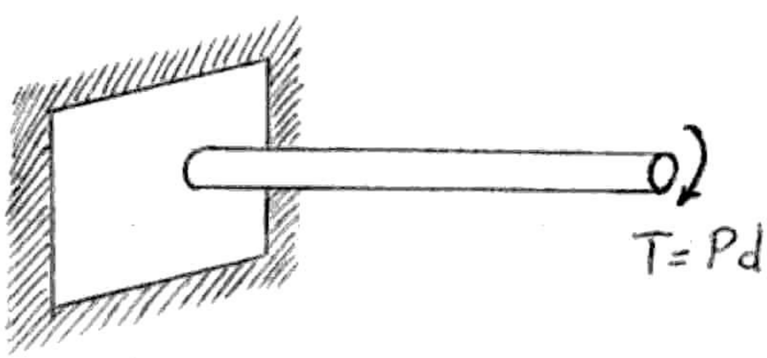


Como consecuencia de este giro la barra experimenta una deformación, que se evidencia en el hecho de que una línea cualquiera que siga la dirección de una generatriz de la barra gira un pequeño ángulo con respecto al extremo fijo.

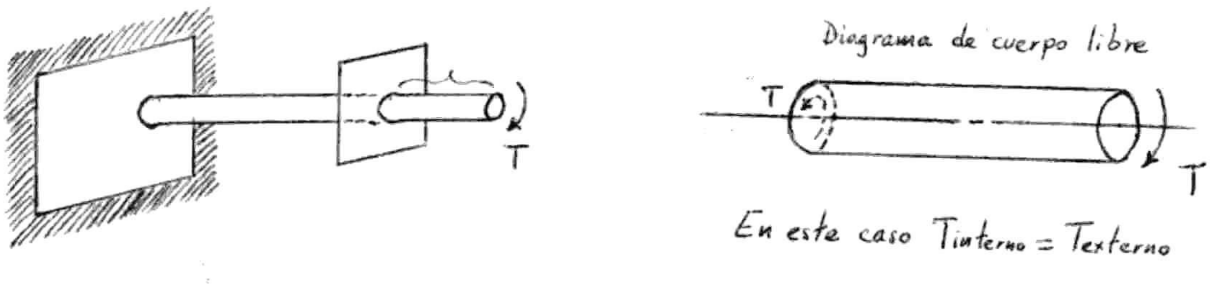
Las cargas de torsión generalmente se presentan en forma de pares que hacen girar los elementos. Estas cargas se aplican por medio de poleas o engranajes que mueven o son movidos por las flechas.

El momento del par de fuerzas aplicado se conoce como momento de torsión **T** (sistema de fuerzas paralelas de igual magnitud y sentido contrario). **T** también se conoce como ***par*** o como ***torque***.

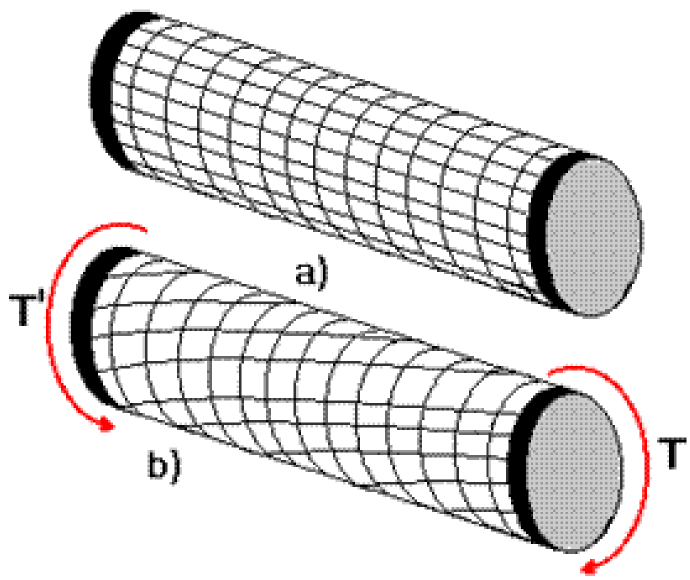
La figura anterior también se representa como sigue:



El par resistente (interno) puede determinarse aplicando la ecuación $\Sigma M = 0$ a un diagrama de cuerpo libre de la flecha.



En la figura siguiente se observa la deformación de la flecha antes y después de aplicar el momento de torsión **T**.



La teoría de la torsión se basa en las siguientes hipótesis:

- Las secciones sometidas a torsión permanecen planas y giran como si fuesen rígidas.
- Las secciones circulares sometidas a torsión permanecen circulares y para pequeños ángulos de torsión no varían las distancias entre ellas ni sus diámetros.

La parte de la pieza que no experimenta ninguna deformación es la parte empotrada; el eje longitudinal de la pieza se denomina eje neutro.

Las fibras longitudinales restantes se deforman transformándose en hélices, experimentan deformaciones angulares y, por tanto, en ellas se crean esfuerzos cortantes. Éstos son directamente proporcionales a su distancia al eje neutro, por lo que los esfuerzos cortantes estarán en la misma relación, siempre teniendo en cuenta que se considera que estamos dentro del período estático del material.

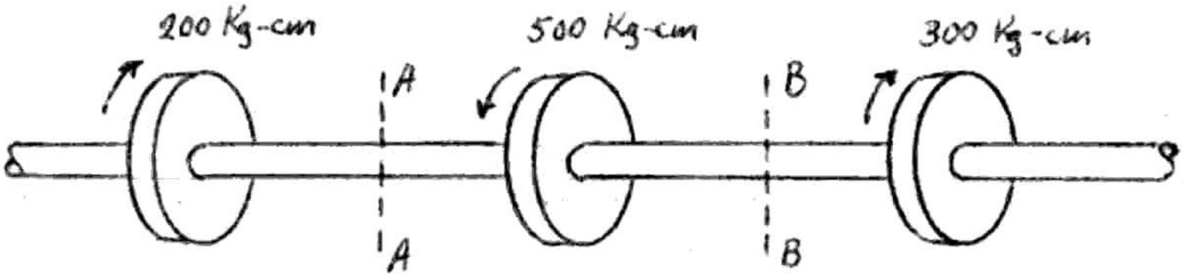
Si el esfuerzo es proporcional a las deformaciones que se producen, el esfuerzo será máximo en el exterior y mínimo en el interior.

Para una flecha sujeta a varios momentos aplicados en diferentes lugares, el momento interno es la suma de todos los momentos externos.

En el ensamble mecánico, se deben apretar los tornillos con el torque adecuado.

El instrumento con el que se verifica el torque adecuado es el torquímetro.

Ejemplo: determinar la magnitud del momento de torsión interno en las secciones indicadas.



Sección A-A:

$\circlearrowright + \Sigma M = 0$:

$200 - M_A = 0 \rightarrow M_A = 200$ kg-cm $\circlearrowleft$ (de izquierda a derecha)

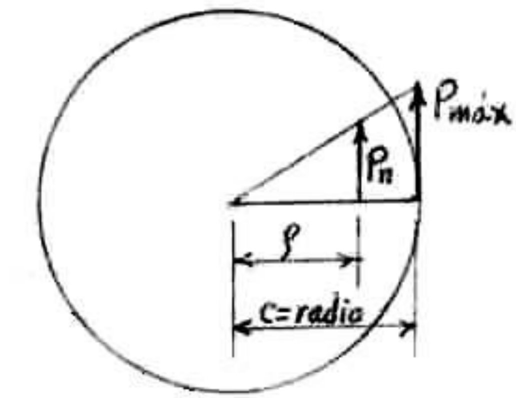
Sección B-B:

$200 - 500 + M_B = 0 \rightarrow M_B = 300$ kg-cm $\circlearrowright$

Esfuerzo cortante

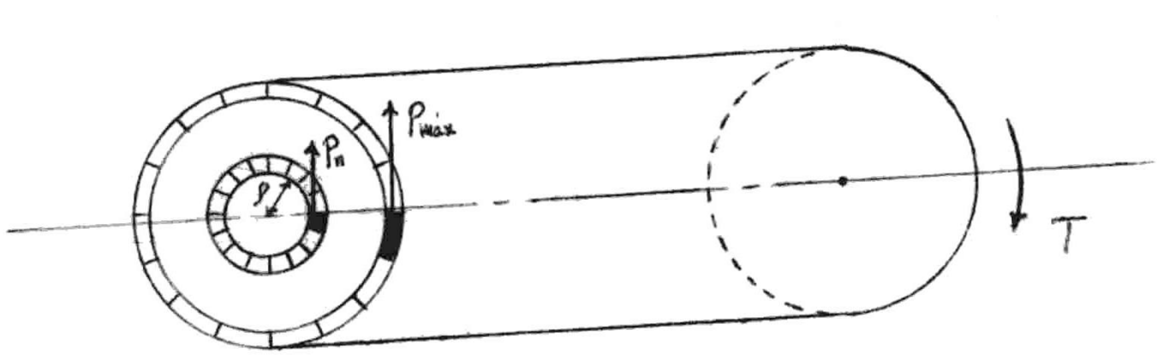
- Si un miembro de sección circular está sujeto a cargas de torsión, se producen fuerzas cortantes internas.

- El producto de estas fuerzas cortantes por sus respectivas distancias al eje de la flecha produce momentos, cuya suma (o resultante) es el momento de torsión interno.

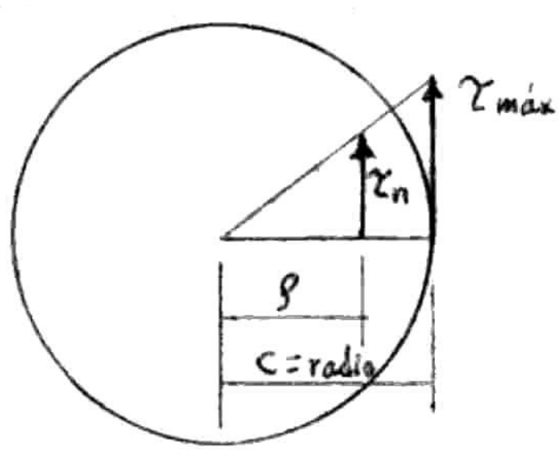


- Como estas fuerzas son tangentes a la superficie del material, producen esfuerzos cortantes.

$$\tau = \frac{P}{A}$$



- En el caso elástico, los esfuerzos sobre cualquier punto localizado a una distancia ρ a partir del eje, son directamente proporcionales al esfuerzo máximo, que ocurre en el punto extremo.



Relación entre $\tau_{máx}$ y el momento que lo produce

- Se determina la fuerza total que actúa sobre un anillo localizado a una distancia ρ a partir del eje.
- Se determina el momento de esta fuerza con respecto al centro de la flecha.
- Se suman los momentos producidos por todos los anillos delgados concéntricos en la flecha, para obtener el momento interno total.

$$P_n = \tau_n \, dA \ldots \text{(a)}$$

donde
P_n = fuerza en el anillo n
τ_n = esfuerzo cortante en el anillo n
dA = área de ese anillo

τ_n puede expresarse en función de $\tau_{máx}$ (por triángulos semejantes)

$$\frac{\tau_n}{\rho} = \frac{\tau_{máx}}{c} \rightarrow \tau_n = \frac{\tau_{máx}\rho}{c} \ldots \text{(b)}$$

Sustituyendo la ecuación (b) en la expresión (a):

$$P_n = \tau_n dA = \tau_{máx} \frac{\rho}{c} dA \ldots \text{(c)}$$

El momento dT de esta fuerza alrededor del eje de la flecha es:

$$dT = P_n \rho = \left(\tau_{máx} \frac{\rho}{c} dA \right) \rho \quad \text{... (d)}$$

El momento interno total es la suma de cada uno de los anillos concéntricos de la flecha.

$$T = \int_0^c \tau_{máx} \frac{\rho}{c} dA \rho \quad \text{... (e)}$$

En una sección transversal dada, $\tau_{máx}$ y c son constantes, entonces:

$$T = \frac{\tau_{máx}}{c} \int_0^c \rho^2 dA \quad \text{... (f)}$$

$\int_0^c \rho^2 dA$ depende sólo de la geometría de la flecha. Representa el momento polar de inercia del área de la sección transversal. El símbolo de este valor es J.

Finalmente, le ecuación (f) se puede expresar como:

$$\tau_{máx} = \frac{Tc}{J}$$

donde

$\tau_{máx}$ = esfuerzo cortante máximo en la flecha
T = momento de torsión
c = radio de la flecha
J = momento polar de inercia

El esfuerzo sobre cualquier punto interno situado a una distancia ρ a partir del eje de la flecha es:

$$\tau = \frac{T\rho}{J} = \frac{\rho}{c} \tau_{máx}$$

Para una sección transversal circular:

J se determina mediante un área en forma de anillo diferencial donde

$d\rho =$ anchura

$2\pi\rho$ = circunferencia

$dA = 2\pi\rho d\rho$

Por lo tanto:

$$J = \int \rho^2 dA = \int_0^c \rho^2 (2\pi\rho d\rho) = 2\pi \int_0^c \rho^3 d\rho = \frac{\pi c^4}{2}$$

$$J = \frac{\pi d^4}{32}$$

Esfuerzo cortante en flechas huecas de sección circular

- La fórmula es la misma que para una flecha maciza.
- La diferencia está en el cálculo del momento polar de inercia.
- Se calcula J restando el momento polar de inercia del agujero, del momento polar de inercia del círculo completo.

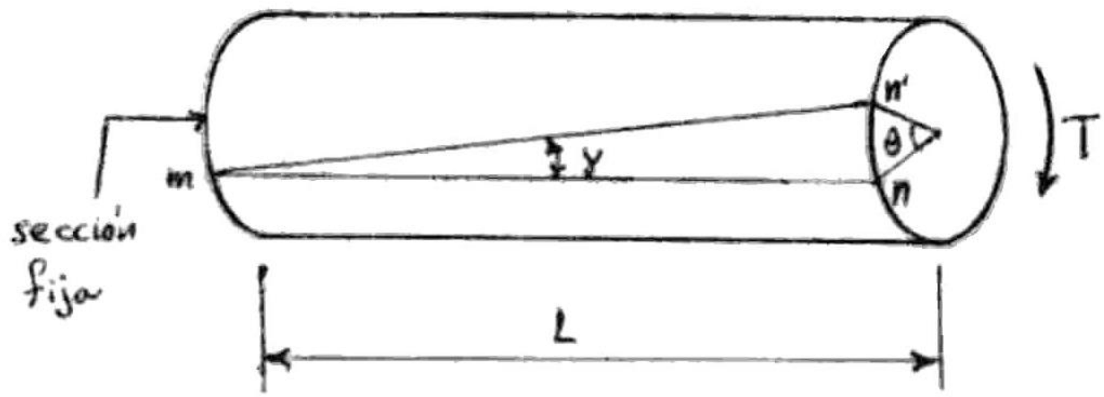
$$J = \frac{\pi d_e^4}{32} - \frac{\pi d_i^4}{32} = \frac{\pi (d_e^4 - d_i^4)}{32}$$

d_e = diámetro exterior y d_i = diámetro interior.

$$J = \frac{\pi (c_e^4 - c_i^4)}{2}$$

c_e = radio exterior y c_i = radio interior.

Ángulo de torsión



Línea mn → posición antes de la torsión
Línea mn' → posición después de la torsión
γ es la deformación por cortante

Cuando se producen ángulos pequeños, el ángulo γ en radianes puede darse mediante la tangente del ángulo.

$$\gamma = \tan\gamma = \frac{nn'}{L} \quad \text{... (a)}$$

El ángulo de torsión θ de la flecha es el ángulo de la sección transversal

$$\theta = \frac{nn'}{r} \rightarrow nn' = r\theta \quad \text{... (b)}$$

sustituyendo (b) en (a)

$$\gamma = \frac{nn'}{L} = \frac{r\theta}{L} \quad \text{... (c)}$$

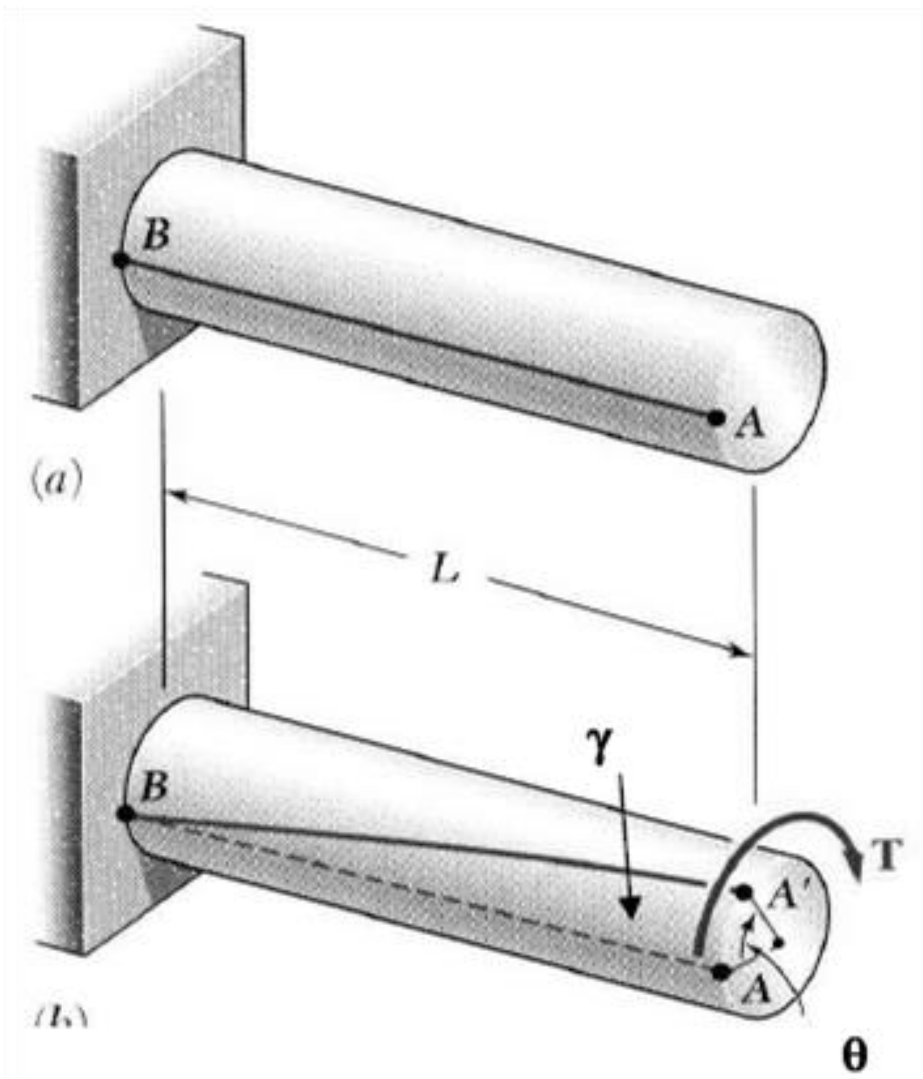
se tiene que $\tau = G\gamma$, entonces:

$$\frac{Tr}{J} = G\frac{r\theta}{L}$$

$$\theta = \frac{TL}{JG}$$

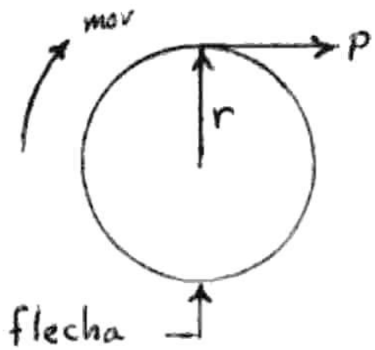
donde

θ = ángulo de torsión, en radianes
T = momento de torsión
L = longitud de la acción de la flecha
G = módulo de elasticidad
J = momento polar de inercia



Potencia en flechas

Flecha.- elemento mecánico que transmite potencia de una fuente al lugar donde se ejecuta el trabajo.



- El trabajo de la fuerza P es el producto de la magnitud de ésta por la distancia recorrida.

- Para una revolución completa:

  Trabajo = P(2πr)

- Si la flecha gira a ***n*** rpm, la distancia recorrida por minuto es:

$$(2\pi r)n$$

- Como la potencia es la cantidad de trabajo por unidad de tiempo, entonces:

$$\text{Potencia} = P(2\pi r)n$$

- La unidad usual de potencia es el caballo de potencia (HP)

$$HP = \frac{Tn}{63000}$$

donde

HP = caballo de potencia
T = momento en la flecha, en lb-plg
n = velocidad de la flecha, en rpm

En el sistema MKS la unidad de potencia es el caballo de vapor (CV)

$$CV = \frac{Tn}{71600}$$

donde

CV = caballo de vapor
T = momento en la flecha, en kg-cm
n = velocidad de la flecha, en rpm

En unidades del Sistema Internacional

$$Pot = 2\pi Tf$$

donde

Pot = potencia, en watts (N -m/seg)
T = momento de torsión, en N-m
f = frecuencia, en Hz (ciclos/seg)

Diseño de flechas

- Se deben considerar esfuerzos cortantes permisibles.
- Determinar el momento de torsión que va a transmitir la flecha.
- El radio de la flecha (c) se determina con la relación:

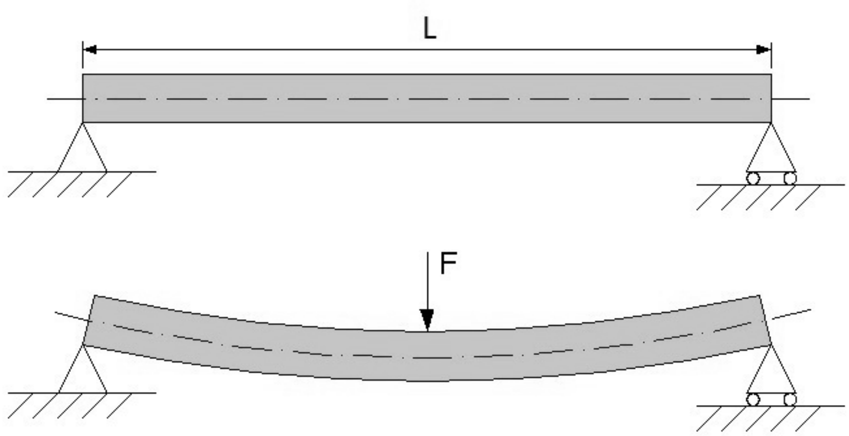
$$\tau_{Máx} = \frac{Tc}{J} \rightarrow \frac{J}{c} = \frac{T}{\tau_{máx}}$$

$\frac{J}{c}$ es el parámetro del que depende la resistencia elástica de una flecha

$$\frac{J}{c} = \frac{\pi c^3}{2}$$

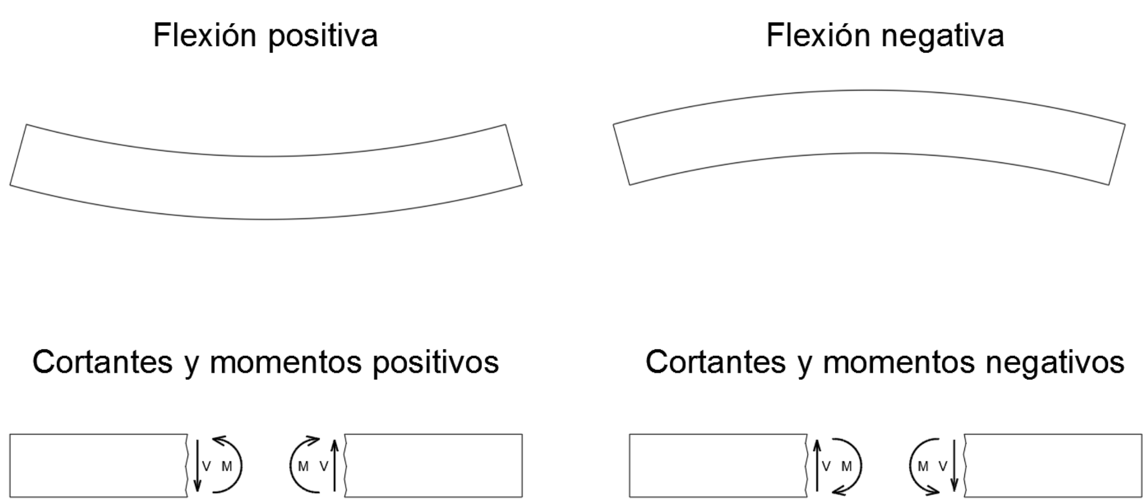
Fuerzas Cortantes,
Momentos Flexionantes y Esfuerzos por Flexión

En la siguiente figura se muestra una viga a la que se le aplica una fuerza que causa una deformación. Para explicar que ocurre en el interior de la viga se hace un corte en una sección.



Antes de realizar el corte es necesario hacer el diagrama de cuerpo libre y encontrar las reacciones.

Se establecen las fuerzas cortantes **V** y los momentos flexionantes **M**.



Fuerza cortante en vigas

- Para que exista equilibrio en segmento de viga, debe haber una fuerza vertical interna **V** que satisface $\Sigma Fy=0$.
- Esta fuerza cortante **V** es igual a la suma de todas las componentes verticales de las fuerzas externas, pero tiene sentido contrario.

Momento flexionante en vigas

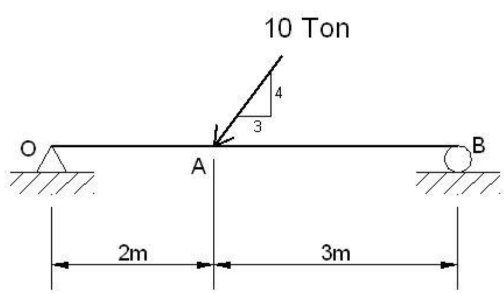
- La tercera condición de equilibrio $\Sigma M=0$ se satisface con un momento interno que se opone al originado por las fuerzas externas.
- Es de la misma magnitud, pero de sentido contrario.
- Como tiende a causar flexión en la viga, se le llama momento flexionante **M**.

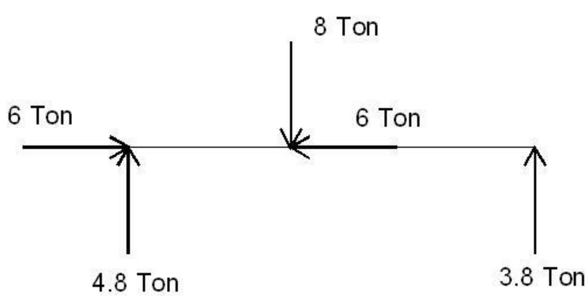
Convención de signos

Para analizar las vigas sometidas a cargas se utiliza una convención de signos para que las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes estudiados tengan significado.

Diagramas de fuerza cortante, fuerza axial y momento flexionante

Ejemplo ilustrativo





$\circlearrowright + \Sigma M_O=0$:

$(8)(2) - R_{By}(5) = 0$

$R_{By} = 3.2$ Ton↑

$\uparrow + \Sigma Fy=0$:

$R_{Oy} -8 + 3.2 = 0$

$R_{Oy} = 4.8$ Ton↑

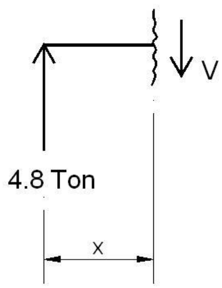
$\rightarrow + \Sigma Fx=0$:

$R_{Ox} - 6 = 0$

$R_{Ox} = 6$ Ton→

Diagrama de fuerzas cortantes

Se comienza en el origen y se avanza a la derecha. La fuerza cortante vale 4.8 Ton desde **O** hasta **A**.

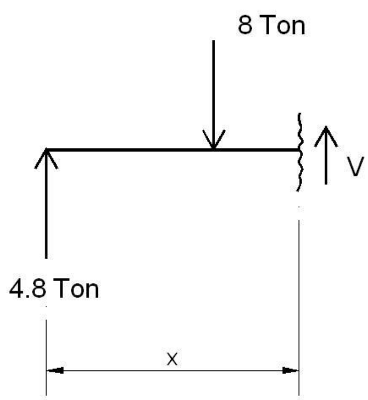


$\uparrow + \Sigma Fy = 0$:

$4.8 - V = 0$

$V = 4.8\ Ton\downarrow$ y por convención de signos, **V** es positiva.

En **A** se reduce 8 Ton por lo queda de -3.2 Ton y se conserva ese valor hasta **B**.



$\uparrow + \Sigma Fy = 0$:

$4.8 - 8 + V = 0$

$V = 8 - 4.8$

$V = 3.2\ Ton\uparrow$ y por convención de signos, **V** es negativa.

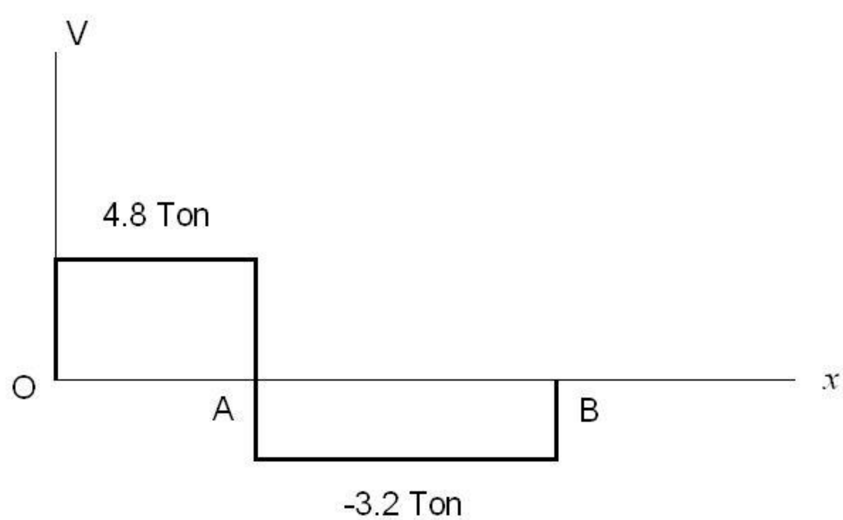


Diagrama de fuerzas axiales

La fuerza axial vale -6 Ton desde **O** hasta **A**. Entre **A** y **B** no existe fuerza horizontal externa y por lo tanto no hay fuerza axial.

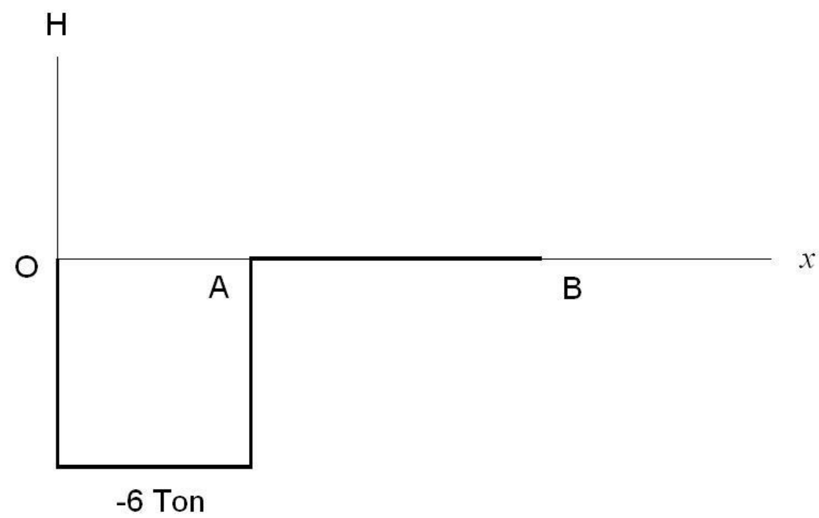
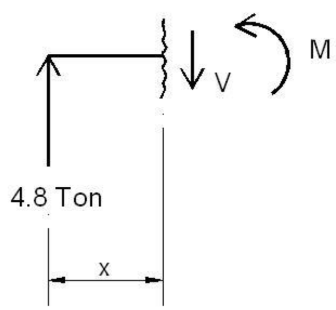


Diagrama de Momentos flexionantes

El cambio de momento entre dos puntos es igual al área del diagrama de fuerza cortante entre esos puntos. El momento en **A** equivale al área del diagrama de fuerzas cortantes entre **O** y **A**, entonces:

$M_{\mathbf{A}} = (4.8)(2) = 9.6$ Ton-m

El momento flexionante depende de la distancia a los apoyos, en este caso varía linealmente:

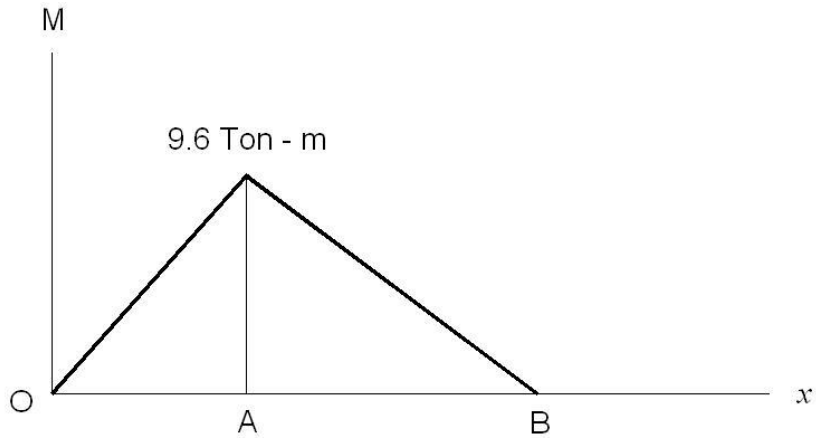


$\circlearrowright + \Sigma M_{CORTE} = 0$:

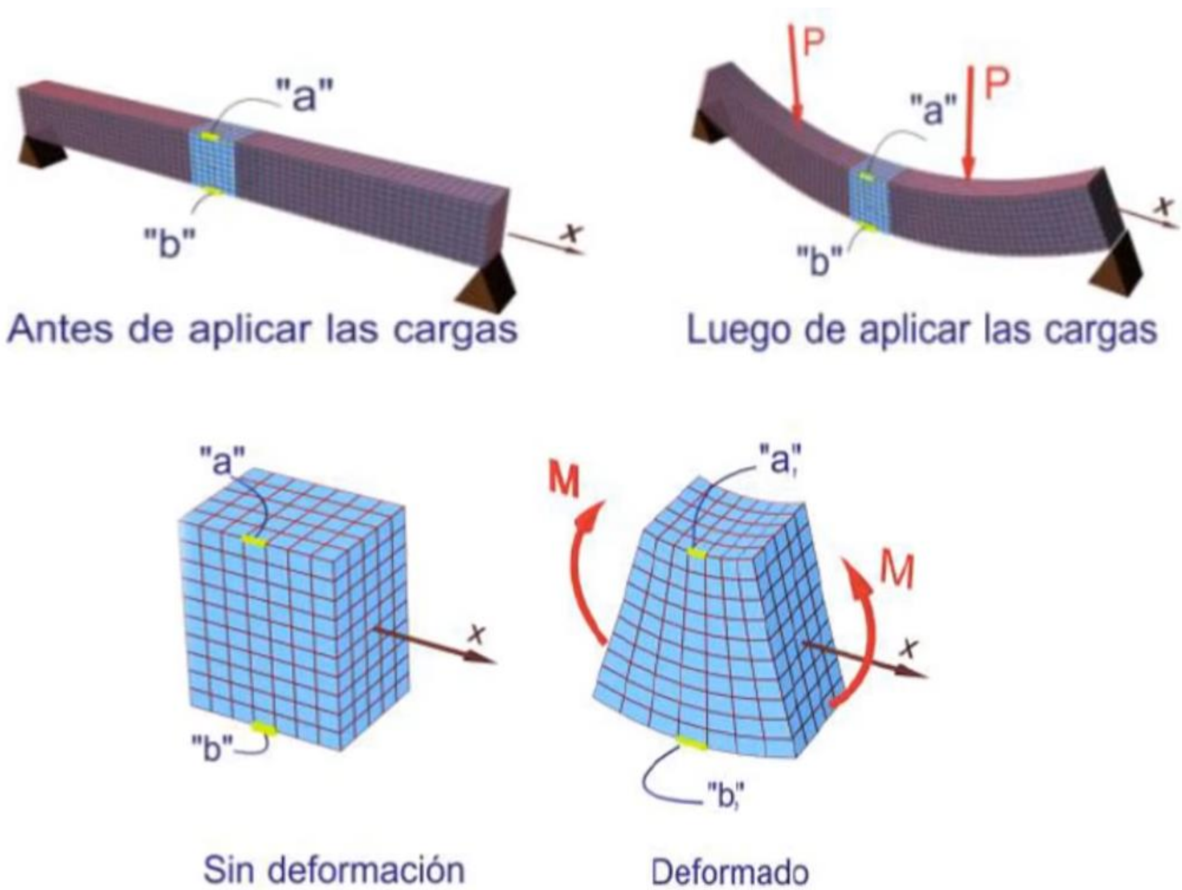
$4.8x - M = 0$

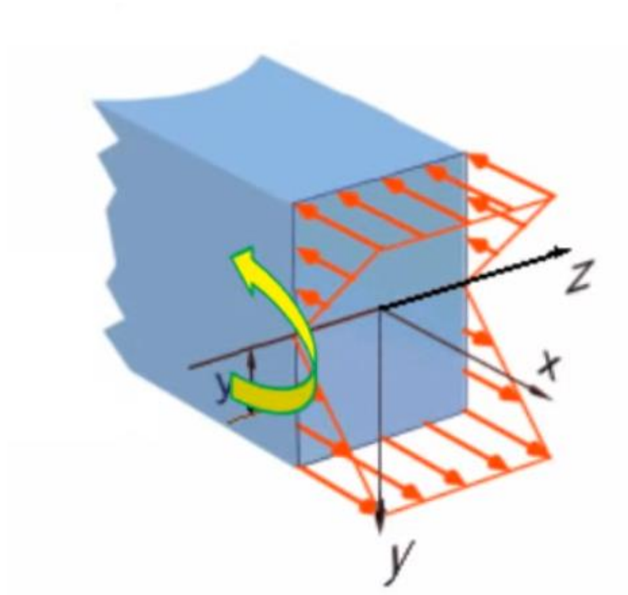
$M = 4.8x$

La ecuación se evalúa en el intervalo del segmento, en este caso desde $x = 0$ hasta $x = 2$.



Esfuerzos normales por flexión





$$\sigma = \frac{Mc}{I}$$

donde

M = Momento flexionante
c = Distancia del eje neutro a la fibra más alejada
I = Momento de inercia

Para una sección circular

$$I = \frac{\pi d^4}{64}$$

Para una sección rectangular

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

BIBLIOGRAFÍA

MECANICA DE MATERIALES
FITZGERALD, ROBERT.
ALFAOMEGA

MECANICA DE MATERIALES
POPOV, EGOR.
LIMUSA

MECANICA DE MATERIALES
HIBBELER, RUSSELL.
CECSA

RESISTENCIA DE MATERIALES
PYTEL, ANDREW. SINGER, FERDINAND.
OXFORD UNIVERSITY PRESS

MECANICA DE MATERIALES
TIMOSHENKO, STEPHEN.
UTEHA